

按单装配系统中组件生产和库存分配控制策略研究

杨超林¹ 沈厚才¹ 高春燕¹

摘要 针对由两种组件、三类顾客需求组成的按单装配系统, 本文研究了其中的组件生产控制与库存分配问题. 在各类顾客需求是泊松到达过程, 各种组件加工时间服从指数分布的假设下, 我们运用马尔科夫决策理论建立了无限期折扣总成本模型, 根据 Lippman 转换得到了相应归一化后的离散最优方程, 在此基础上分析了生产和库存分配联合最优控制策略的结构性质. 本文证明了最优策略是依赖于系统状态的动态策略. 组件的最优生产策略是动态基库存策略, 其中基库存水平是关于系统中其他组件库存水平的非减函数. 而最优的分配策略是动态的阈值策略, 对于只需一种组件构成的顾客需求, 组件的分配阈值是系统中另一组件库存水平的增函数; 而对于同时需要两种组件组成的顾客需求, 其各组件的分配阈值是另一组件库存水平的减函数. 最后通过数值试验给出了各个参数对联合最优控制策略的影响, 并得到了相应的管理启示.

关键词 按单装配, 多类需求, 马尔科夫决策, 最优控制策略

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.00234

Joint Control of Component Production and Inventory Allocation in an Assemble-to-order System with Lost Sales

YANG Chao-Lin¹ SHEN Hou-Cai¹ GAO Chun-Yan¹

Abstract This paper considers a joint control problem of combined component production and inventory allocation in an assemble-to-order system which consists of two components and three demand classes with lost sales. Each demand class arrives according to a Poisson process, and the production time of each component follows an exponential distribution. By formulating the system as a Markov decision process under the expected total discounted cost criterion, we obtain the optimality equation following the Lippman transformation, from which we derive the structural properties of the optimal control policy. Specially, the optimal production policy for each component is shown to be a base stock policy with the base-stock level non-decreasing in the inventory level of the other component, and the optimal inventory allocation for each component is a state-dependent threshold policy, where the threshold point for the demand for one kind of components is non-decreasing in the inventory level of the other component, while the threshold point for the demand for both components is non-increasing in the inventory level of the other component. Finally, we give some numerical examples to show how the optimal control policy changes with the system parameters, and we also provide some managerial insights.

Key words Assemble-to-order system, multi-class demand, Markov decision process, optimal control policy

在产品更新换代频繁的今天, 如何以更低的成本满足市场日益多样化需求成为企业管理者面临的难题之一, 也是学术界关注的主要问题之一. 在这种背景下, 按单装配 (Assemble-to-order, ATO) 这种新的运营策略被提出, 并且被许多企业如著名的代工企业 Flextronics 公司采用^[1]. 采用 ATO 运营方式的企业, 按照存货生产方式提前生产通用组件, 而产成品在接到顾客订单以后再进行个性化装配 (按单装配系统的结构图如图 1 所示). ATO 运营方式使得企业能够以较低的库存量、较快的速度提供多样化的产品满足顾客的个性化需求. 然而除组件的

生产控制这个传统问题外, 通用件的库存分配问题也十分重要. 采用有效的生产策略和库存分配策略可以更好地体现 ATO 运营方式的优越性, 并且与之相关的问题也引起了学术界的研究兴趣. 作为一个制造大国, 以华为等为代表的我国企业也在应用这种策略来参与国际市场竞争.

目前与本文所研究 ATO 运营问题相关的文献大致可以分为两类: 一类是外生提前期情况下的库存控制问题^[2-6]. 本文主要关注点是内生提前期方面的工作. Ha^[7] 研究了单产品, 多类需求、缺货不补 (Lost sales) 的库存生产 (Make-to-stock, MTS) 系统, 在各类需求以泊松过程到达, 产品加工时间服从指数分布假设下, 证明了最优生产策略是静态基库存策略、最优库存分配策略是阈值策略. Ha^[8] 研究了两类需求、缺货候补系统 (Backorders), 证明了最优生产策略是基库存策略、最优库存分配策略是依赖于系统中各类需求缺货量的动态策略. 2000 年 Ha^[9] 将原模型进一步推广到产品加工时间服从爱尔兰分布的情况, 证明了最优生产策略是依赖于系

收稿日期 2010-04-01 录用日期 2010-08-18

Manuscript received April 1, 2010; accepted August 18, 2010
国家自然科学基金 (71071074, 70831002), 江苏省自然科学基金 (BK2008273) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (71071074, 70831002) and Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK2008273)

1. 南京大学工程管理学院 南京 210093

1. School of Management Science and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093

统当前库存水平和生产进度的基库存策略; 而最优库存分配策略是依赖于系统当前库存水平和生产进度的阈值策略. 2009 年 Gayon 等^[10] 在 Ha^[7] 模型的基础上考虑了各类顾客向供应商提供一个不完美的需求信息的情形. 并给出了最优生产策略和库存分配策略. 2002 年 Vericourt 等^[11] 将 Ha^[8] 推广到多类需求情况, 并证明了最优策略具有和 Ha^[8] 类似的性质. Benjaafar 等^[1] 研究了多组件、单产品、多类需求的 ATO 系统. 在各类需求以相互独立泊松过程到达、组件加工时间服从指数分布假设下, 他们证明了组件最优生产策略是动态基库存策略、组件库存最优分配策略则是动态阈值策略.

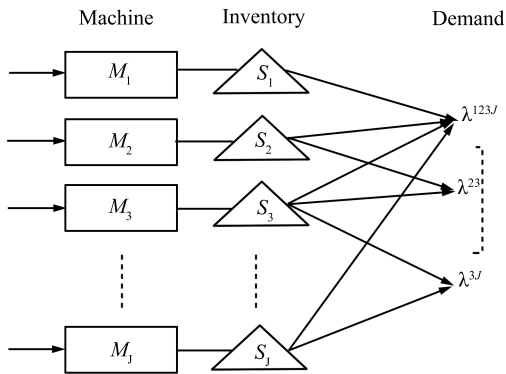


图 1 ATO 系统结构图

Fig. 1 The structure of ATO system

上述研究的是单产品、多类顾客的 MTS 系统和 ATO 系统, 本文研究的系统与其不同, 研究的是产品需求缺货不补的两种组件、三类产品需求的 ATO 系统. 我们将运用马尔科夫决策理论、数值试验等方法研究系统最优策略的结构性质.

1 模型建立与分析

本文研究这样一种 ATO 系统: 两种组件分别在两个不同的设备上生产并且分别存入库存点 1、2 两处, 在接到三类不同顾客订单以后, 分别用这两种组件装配成三种产品来满足这三类顾客需求. 第 1 类产品需求由 1 个组件 1 构成, 第 2 类产品需求由 1 个组件 2 构成, 第 3 类产品需求由 1 个组件 1 和 1 个组件 2 构成. 假定各类需求以相互独立的泊松过程到达, 到达率分别为 \$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\$, 组件生产时间分别服从均值为 \$1/\mu_1, 1/\mu_2\$ 的指数分布. 系统运营的主要问题是组件的生产决策和组件的库存分配决策. 生产决策确定各组件何时生产、生产到什么时刻; 库存分配决策确定两种组件库存如何在三类产品需求中分配, 即决定是否满足某个到达的产品需求. 如果需求被拒绝, 将会产生拒绝成本, 三类需求的单位拒绝成本记为 \$c_1, c_2, c_3\$. 不失一般性, 我们假定 \$c_3 > c_1 \geq c_2\$.

以 \$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))\$ 表示系统在时刻 \$t\$ 的状态, 其中 \$x_i(t)\$ 表示时刻 \$t\$ 第 \$i\$ 种组件的库存水平. \$h(\mathbf{x}(t)) = h_1(x_1) + h_2(x_2)\$ 表示系统在时刻 \$t\$ 状态 \$\mathbf{x}(t)\$ 下的库存持有成本, \$h_i(x_i)\$ 是关于 \$x_i\$ 单调增的凸函数. 由于各类需求到达的时间间隔和单位组件生产所需时间都服从指数分布, 所以问题可以看作一个马尔科夫决策过程.

设 \$\pi\$ 是任意可行控制策略, 系统所处状态记为 \$(x_1, x_2)\$, 即 \$x_1(t) = x_1, x_2(t) = x_2\$. 在策略 \$\pi\$ 下, 决策者行动记为 \$a^\pi(x_1, x_2) = (u_1, u_2, v_1, v_2, v_3)\$, 如果 \$u_i = 1\$, 那么当系统处于状态 \$(x_1, x_2)\$ 时, 需要生产第 \$i\$ 类组件, \$u_i = 0\$ 则不生产; 如果 \$v_i = 1\$, 那么当系统处于状态 \$(x_1, x_2)\$ 时, 满足到达的第 \$i\$ 类需求, \$v_i = 0\$ 则拒绝该需求. \$N_i^\pi(t)\$ 表示在控制策略 \$\pi\$ 下, \$[0, t]\$ 时间段内被拒绝的第 \$i\$ 类需求的总数. 系统的期望无限期折扣总成本可以写为

$$E_{\mathbf{x}}^\pi \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} h(\mathbf{x}(t)) dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty e^{-\alpha t} c_i dN_i^\pi(t) \right] \quad (1)$$

其中 \$\alpha\$ 表示折扣因子, \$\mathbf{x} = \mathbf{x}(0)\$ 表示初始库存水平. 式 (1) 中, 第一部分表示的是无限期折扣的总持有成本, 第二部分表示的是无限期折扣的总拒绝成本. 它们都与所采取的策略 \$\pi\$ 有关. 我们的目标是寻找一个最优控制策略 \$\pi^*\$, 使得上述期望总成本最小, 记 \$V(\mathbf{x})\$ 为上述最小成本. 给定控制策略 \$\pi\$, 库存水平的变化过程是连续时间、离散状态的马尔科夫过程. 根据文献 [12], 对系统状态转移概率进行归一化处理, 设 \$\gamma = \sum_{i=1}^3 \lambda_i + \sum_{i=1}^2 \mu_i\$, 重新定义时间单位, 使得 \$\alpha + \gamma = 1\$, 对式 (1) 进行离散化处理后可得如下离散化的最优动态方程:

$$V(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 \mu_k T_k V(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i T^i V(\mathbf{x}) \quad (2)$$

其中

$$T_k V(\mathbf{x}) = \min\{V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_k), V(\mathbf{x})\}$$

$$T^i V(\mathbf{x}) = \begin{cases} V(\mathbf{x}) + c_i, & x_i = 0 \\ \min\{V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i), V(\mathbf{x}) + c_i\}, & x_i \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1), \mathbf{e}_3 = (1, 1)$$

最优方程 (2) 表示: 以当前状态作为初始状态的无限期折扣总成本 (等式左边) 等于当前时刻到下一次状态转移时刻期间所产生的持有成本的现值, 加上以转移后状态作为初始状态的无限期折扣成本的现值. 最优策略满足最优方程 (2), 而从最优方程可以刻画最优策略如下:

1) 如果 \$V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - V(\mathbf{x}) \le 0\$, 即某一组件库存水平增加 1 个单位可以降低系统的最小成本, 则应该选择开始生产该组件; 否则停止生产.

2) 当有现货时, 如果 $V(\mathbf{x}) + c_i \geq V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)$, 即某组件库存水平减少 1 个单位使得系统最小成本增加的量小于拒绝只需要该种组件的成品需求所将产生的拒绝成本时, 应满足该类需求; 否则拒绝. 如果组件 1 和 2 各减少一个单位使得系统最小成本增加的总量小于拒绝第三类成品需求所将产生的拒绝成本, 则应满足该类需求; 否则拒绝.

2 最优控制策略及其结构性质

记 $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$, 定义如下微分算子:

$$\Delta_j V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) - V(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$\Delta_e V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - V(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$\Delta_{i,j} V(\mathbf{x}) = \Delta_j V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - \Delta_j V(\mathbf{x}) \quad (5)$$

以 \mathcal{V} 表示定义在非负整数集上的函数集合, 并且满足以下性质: 若 $V \in \mathcal{V}$, 则对于 $i = 1, 2$ 有如下性质:

$$A1: \quad \Delta_{i,i} V(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (6)$$

$$A2: \quad \Delta_{1,2} V(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (7)$$

$$A3: \quad \Delta_{e,i} V(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (8)$$

性质 A1 表明 $V(\mathbf{x})$ 具有凸性, 性质 A2 表明 $\Delta_i V(\mathbf{x})$ 是 x_j 的减函数, 性质 A3 表明 $\Delta_e V(\mathbf{x})$ 是 x_i 的增函数.

引理 1. 如果 $V \in \mathcal{V}$, 则有 $TV \in \mathcal{V}$, 其中 $TV(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 \mu_k T_k V(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i T^i V(\mathbf{x})$.

证明. 由文献 [1] 知当 $V \in \mathcal{V}$ 时有 $T_k V(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ 以及 $T^3 V(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$. 由对称性, 只需证明 $T^1 V(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$, 即证明 $T^1 V(\mathbf{x})$ 满足性质 A1 ~ A3.

$$T^1 V(\mathbf{x}) = \begin{cases} V(\mathbf{x}) + c_1, & x_1 = 0 \\ \min\{V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1), V(\mathbf{x}) + c_1\}, & x_1 \neq 0 \\ V(\mathbf{x}) + c_1 + \\ \begin{cases} 0, & x_1 = 0 \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1, 0\}, & x_1 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

1) 要证明 $T^1 V$ 满足性质 A1, 即证 $\Delta_{i,i} T^1 V(\mathbf{x}) \geq 0$, 当 $i = 1$ 时, 由文献 [7] 知结论成立. 下面证明 $\Delta_{2,2} T^1 V(\mathbf{x}) \geq 0$.

$$\Delta_{2,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,2} V(\mathbf{x}) + \begin{cases} 0, & x_1 = 0 \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) - c_1, 0\} - \\ \quad 2 \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - c_1, 0\} + \\ \quad \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1, 0\}, & x_1 \neq 0 \end{cases}$$

当 $x_1 = 0$ 时, $\Delta_{2,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,2} V(\mathbf{x}) \geq 0$.

当 $x_1 \neq 0$ 时, 由 A2 知:

$$-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1$$

下面分四种情况分别进行分析:

a) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0$ 时,

$$\Delta_{2,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,2} V(\mathbf{x}) \geq 0$$

b) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1$ 时,

$$\Delta_{2,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,2} V(\mathbf{x}) - \Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 = \Delta_{2,e} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - \Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq 0$$

c) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - c_1$ 时,

$$\Delta_{2,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,e} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) + \Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + c_1 \geq 0$$

d) 当 $0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) - c_1$ 时,

$$\Delta_{2,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,2} V(\mathbf{x}) - \Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) + 2\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) = \Delta_{2,2} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) \geq 0$$

2) 要证明 $T^1 V$ 满足性质 A2, 即证 $\Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) \leq 0$.

$$\Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,2} V(\mathbf{x}) + \begin{cases} \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1, 0\} - \\ \quad \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1, 0\}, & x_1 = 0 \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1, 0\} - \\ \quad \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1, 0\} - \\ \quad \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1, 0\} + \\ \quad \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1, 0\}, & x_1 \neq 0 \end{cases}$$

由 A2 和 A3 知: $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1$.

下面分五种情况分别进行分析:

a) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1 \geq 0$ 时,

$$\Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,2} V(\mathbf{x}) \leq 0$$

b) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1$ 时,

$$\Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,2} V(\mathbf{x}) + \Delta_1 V(\mathbf{x}) + c_1 = \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) + c_1 \leq 0$$

c) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1$ 时,

$$\Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,2} V(\mathbf{x}) - \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) + \Delta_1 V(\mathbf{x}) \leq 0$$

d) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1$ 时,

$$\Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) = -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \leq 0$$

e) 当 $0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) &= \Delta_{1,2} V(\mathbf{x}) - \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) + \Delta_1 V(\mathbf{x}) - \Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - \\ &\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \Delta_{1,2} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) \leq 0 \end{aligned}$$

可知 $x_1 = 0$ 及 $x_1 \neq 0$ 时都有 $\Delta_{1,2} T^1 V(\mathbf{x}) \leq 0$.

3) 要证明 $T^1 V$ 满足性质 A3, 即证 $\Delta_{i,e} T^1 V(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, 2$.

$$\Delta_{1,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,e} V(\mathbf{x}) + \begin{cases} \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - c_1, 0\} - \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1, 0\} - \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1, 0\}, & x_1 = 0 \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - c_1, 0\} - \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1, 0\} - \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1, 0\} + \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1, 0\}, & x_1 \neq 0 \end{cases}$$

由 A2 和 A3 知: $-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - c_1$.

下面分四种情况分别进行分析:

a) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - c_1 \geq 0$ 时,

$$\Delta_{1,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,e} V(\mathbf{x}) \geq 0$$

b) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - c_1$ 时,

$$\Delta_{1,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,e} V(\mathbf{x}) - \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - c_1 = \Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1 \geq 0$$

c) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x}) - c_1$ 时,

$$\Delta_{1,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,e} V(\mathbf{x}) - \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}) + \Delta_1 V(\mathbf{x}) = 0$$

d) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1$ 时,

$$\Delta_{1,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) + c_1 \geq 0$$

e) 当 $0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1$ 时,

$$\Delta_{1,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{1,e} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) \geq 0$$

可知 $x_1 = 0$ 及 $x_1 \neq 0$ 时都有 $\Delta_{1,e} T^1 V(\mathbf{x}) \geq 0$.

$$\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,e} V(\mathbf{x}) + \begin{cases} \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + 2\mathbf{e}_2) - c_1, 0\} - \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1, 0\}, & x_1 = 0 \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + 2\mathbf{e}_2) - c_1, 0\} - \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1, 0\} - \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1, 0\} + \\ \min\{-\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1, 0\}, & x_1 \neq 0 \end{cases}$$

由 A2 和 A3 知: $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1$,

下面分六种情况分别进行分析:

a) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1 \geq 0$ 时,

$$\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,e} V(\mathbf{x}) \geq 0$$

b) 当 $\begin{cases} -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \\ -\Delta_1 V(\mathbf{x} + 2\mathbf{e}_2) - c_1 \end{cases} \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) - c_1$ 时,

$$\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,e} V(\mathbf{x}) + \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2) + c_1 \geq 0$$

c) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + 2\mathbf{e}_2) - c_1$ 时,

$$\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,2} V(\mathbf{x}) \geq 0$$

d) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1$ 时,

$$\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{e,2} V(\mathbf{x}) + \Delta_{e,1} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) \geq 0$$

e) 当 $-\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0 \geq \begin{cases} -\Delta_1 V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - c_1 \\ -\Delta_1 V(\mathbf{x} + 2\mathbf{e}_2) - c_1 \end{cases}$ 时,

$$\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,e} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) - \Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1 \geq 0$$

f) 当 $0 \geq -\Delta_1 V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) - c_1$ 时,

$$\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) = \Delta_{2,e} V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_1) \geq 0$$

可知 $x_1 = 0$ 及 $x_1 \neq 0$ 时都有 $\Delta_{2,e} T^1 V(\mathbf{x}) \geq 0$.

于是 $T^1 V(\mathbf{x})$ 满足性质 A1 ~ A3, 即 $T^1 V(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$. 同理可证 $T^2 V(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$. 由于 $h(\mathbf{x})$ 是单调增的凸函数, 它自然满足性质 A1 ~ A3, 而函数空间 \mathcal{V} 对线性运算是封闭的. 综上所述, 当 $V \in \mathcal{V}$ 时, 有 $TV \in \mathcal{V}$. \square

定义如下函数:

$$S_k(x_{-k}) = \min\{x_k \geq 0 | \Delta_k V(\mathbf{x}) \geq 0\}$$

$$R_k(x_{-k}) = \min\{x_k \geq 0 | \Delta_k V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_k) \geq -c_k\}$$

$$R_3^k(x_{-k}) = \min\{x_k \geq 0 | \Delta_e V(\mathbf{x} - \mathbf{e}) \geq -c_3\}$$

其中, $k = 1, 2, x_{-k} = x_j (k \neq j)$, 于是有引理 2 成立.

引理 2.

- 1) $S_k(x_{-k}) \leq S_k(x_{-k} + 1), S_k(x_{-k} + 1) \leq S_k(x_{-k}) + 1;$
- 2) $R_k(x_{-k}) \leq R_k(x_{-k} + 1), R_k(x_{-k} + 1) \leq R_k(x_{-k}) + 1;$
- 3) $R_3^k(x_{-k} + 1) \leq R_3^k(x_{-k}).$

证明. 以 $k = 1$ 为例, 根据 A2 和 $S_1(x_2)$ 的定义知, 当 $\Delta_1 V(S_1(x_2 + 1), x_2) \geq \Delta_1 V(S_1(x_2 + 1), x_2 + 1) \geq 0$ 时, 可得: $\Delta_1 V(S_1(x_2 + 1), x_2) \geq 0$, 由 $S_1(x_2)$ 的定义知 $S_1(x_2) \leq S_1(x_2 + 1)$.

由 A3 知, 当 $\Delta_1 V(S_1(x_2) + 1, x_2 + 1) \geq \Delta_1 V(S_1(x_2), x_2) \geq 0$ 时, 可得: $\Delta_1 V(S_1(x_2) + 1, x_2 + 1) \geq 0$. 由 $S_1(x_2)$ 的定义知 $S_k(x_{-k} + 1) \leq S_k(x_{-k}) + 1$, 同理可证 2) 成立.

由 A3 知, 当 $\Delta_e(R_3^1(x_2), x_2 + 1) \geq \Delta_e(R_3^1(x_2), x_2) \geq -c_3$ 时, $\Delta_e(R_3^1(x_2), x_2 + 1) \geq -c_3$. 由 $R_3^1(x_2)$ 的定义知, $R_1(x_2 + 1) \leq R_1(x_2)$. \square

基于引理 1 和引理 2, 有如下定理成立^[13].

定理 1. 系统存在如下的控制策略, 当系统处于状态 (x_1, x_2) 时, 第 i 种组件的最优生产策略是动态的基库存策略, 即存在基库存水平 $S_i(x_{-i})$, 当且仅当 $x_i < S_i(x_{-i})$ 时需要生产组件 i . 组件的最优分配策略是动态的阈值策略, 即存在阈值水平 $R_i(x_{-i})$, 当 $x_i \geq R_i(x_{-i})$ 时满足第 $i (i = 1, 2)$ 类需求; 存在阈值水平 $(R_3^1(x_2), R_3^2(x_1))$, 当 $x_1 \geq R_3^1(x_2)$ 且 $x_2 \geq R_3^2(x_1)$ 时, 满足第 3 类需求, 否则拒绝. 最优控制策略还具有如下性质:

- 1) $S_i(x_{-i})$ 是 x_{-i} 的非降函数, 即随着 x_{-i} 的增大, 组件 i 的生产基库存水平要么增大要么不变, 但不会减小, 并且 x_{-i} 每增加 1, 组件 i 的基库存水平至多增加 1 个单位, 即 $S_i(x_{-i} + 1) \leq S_i(x_{-i}) + 1$.
- 2) $R_i(x_{-i})$ 是 x_{-i} 的非降函数, 即随着 x_{-i} 的增大, 第 i 类需求的分配阈值要么增大要么不变, 但不会减小, 并且有 $R_i(x_{-i} + 1) \leq R_i(x_{-i}) + 1 (i = 1, 2)$; 而 $R_3^j(x_{-j})$ 是 x_{-j} 的非增函数, 即随着 x_{-j} 的增大, 第 3 类需求组件 j 的分配阈值水平要么减小要么不变, 但不会增加.

图 2 和图 3 分别描述了系统的最优生产策略和库存分配策略的结构, 并且在图中标明了各个区域相应的最优行为策略.

($\alpha = 0.01, h_1 = h_2 = 1, \mu_1 = \mu_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.8, c_3 = 250$)

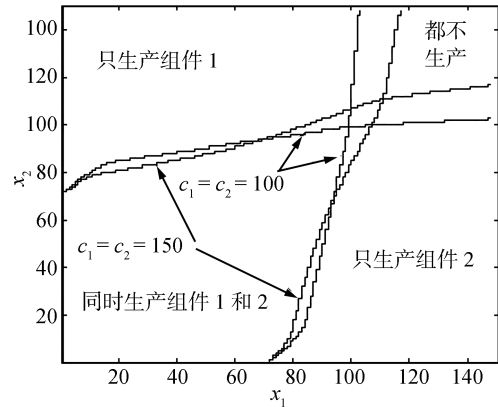


图 2 最优生产策略的结构

Fig. 2 The structure of the optimal production policy

($\alpha = 0.01, h_1 = h_2 = 1, \mu_1 = \mu_2 = 1.5, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1.8, c_1 = c_2 = 100, c_3 = 280$)

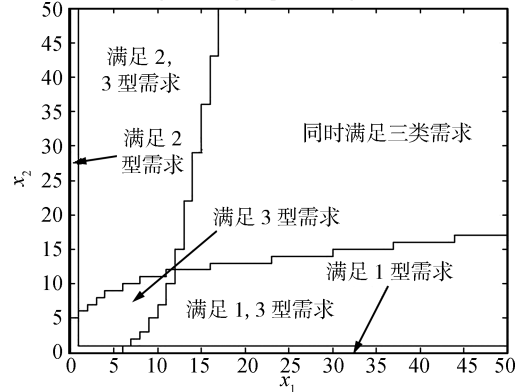


图 3 最优分配策略

Fig. 3 The structure of the optimal allocation policy

3 数值试验

为了进一步分析各参数对最优分配策略的影响, 我们进行了一系列的数值试验. 数值试验首先利用值迭代方法^[14] 求解最优动态方程 (2) 得到最优成本函数在其状态空间上的取值. 算法迭代的状态空间截取在 $\{0, n_1^{\max}\} \times \{0, n_2^{\max}\}$, 其中 n_1^{\max}, n_2^{\max} 的取值足够大, 使得最优成本函数的取值基本不再受截取水平影响. 值迭代过程连续两次迭代结果的误差精确到四位小数时迭代停止. 然后利用求得的最优成本函数 (记为 V) 得到最优的库存控制策略, 即当系统处于状态 \mathbf{x} 时, 如果 $V(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - V(\mathbf{x}) \leq 0$, 则应该开始生产该组件; 否则停止生产. 当有现货时, 如果 $V(\mathbf{x}) + c_i \geq V(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)$, 则满足第 i 类需求; 否则拒绝.

图 4 和图 5 分别讨论了 λ_1 和 λ_3 对最优分配策略的影响. 从图 4 可以看出, 其他条件不变, λ_1 越小, 则第 1 类需求的分配阈值越低, 第 2 类需求的分配阈值越高. 当组件 1 的需求率远远小于组件 2 的需求率, 并且 1 型需求的拒绝成本不是很低的情况下,

公司可以采取捆绑式销售策略. 在图 4 给出的最优控制策略中体现为, 当 λ_1 远远小于 λ_2 时, 第 1 类需求的分配阈值接近于 1, 而第 2 类需求的分配阈值较高. 只有当组件 2 的库存水平高于阈值水平时, 才满足第 2 类需求. 只要有现货, 尽量满足第 1, 3 类需求. 从图 5 中可以看出, 若其他条件不变, λ_3 越大, 则第 1, 2 类需求的分配阈值越高, 第 3 类需求的分配阈值越低. 这是因为第 3 类需求的到达率越大, 企业更倾向于将组件 1 和 2 留存下来, 满足未来到达的第 3 类顾客需求.

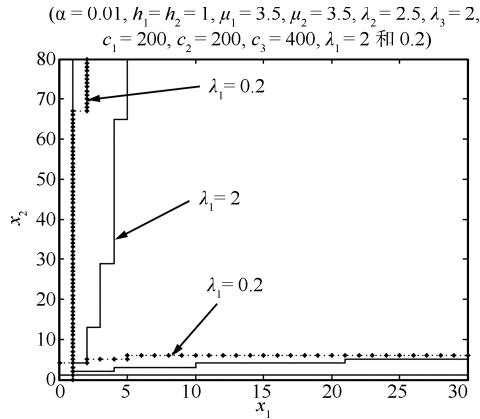


图 4 λ_1 对最优分配策略的影响
Fig. 4 The optimal allocation policy vs. λ_1 with $c_1 + c_2 < c_3$

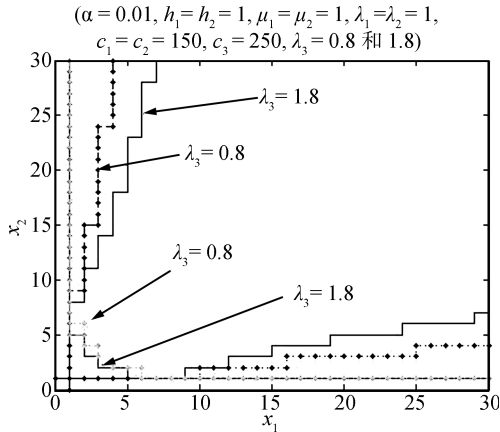


图 5 λ_3 对最优分配策略的影响
Fig. 5 The optimal allocation policy vs. λ_3 with $c_1 + c_2 > c_3$

图 6 和图 7 分别讨论了当 $c_1 + c_2 < c_3$ 时, c_1 和 c_3 对最优分配策略的影响. 从图 6 可以看出, 其他条件不变, c_1 越大, 则第 1, 2 类需求的分配阈值越低, 此时降低第 1 类需求分配阈值的同时还要降低第 2 类需求的分配阈值是为了尽量让组件 1 和 2 的库存水平与第 1, 2 类顾客需求的到达率相一致. 从图 7 可以看出, 其他条件不变, c_3 越大, 则第 1, 2 类需求的分配阈值越高. 需要说明的是, 当 $c_1 + c_2$

$< c_3$ 时, 数值试验给出的结果是, 只要有现货, 第 3 类需求总是满足的, 遗憾的是, 理论上证明该性质存在困难.

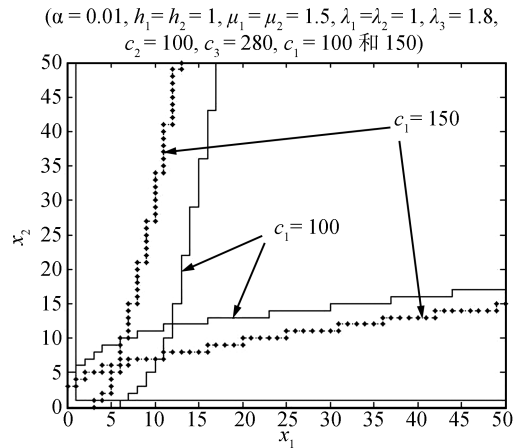


图 6 $c_1 + c_2 < c_3$ 时 c_1 对最优分配策略的影响
Fig. 6 The optimal allocation policy vs. c_1 with $c_1 + c_2 < c_3$

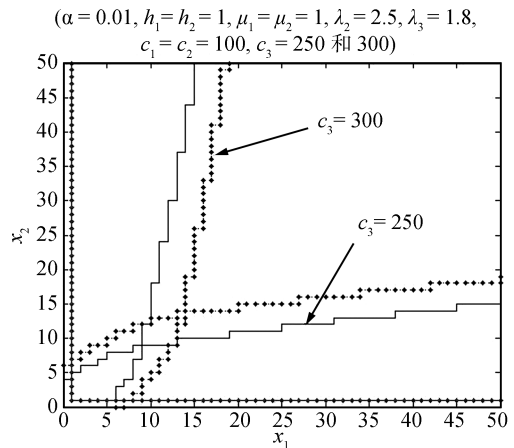


图 7 $c_1 + c_2 < c_3$ 时 c_3 对最优分配策略的影响
Fig. 7 The optimal allocation policy vs. c_3 with $c_1 + c_2 < c_3$

图 8 讨论了当 $c_1 + c_2 > c_3$ 时, c_1 对最优分配策略的影响. 其他条件不变, c_1 越大, 则第 1, 2 类需求的分配阈值越低, 第 3 类需求的分配阈值越高. c_3 变化对各类需求最优分配策略的影响反之.

4 小结与展望

针对由两种组件、三类顾客需求组成的按单装配系统, 本文研究了其中的组件生产控制与库存分配问题. 运用马尔科夫决策理论, 得到了最优控制方程, 得到了最优控制策略的结构性质, 证明了最优控制策略是依赖于系统状态的动态策略. 各组件最优生产策略是动态基库存策略, 其中基库存水平是其他组件库存水平的非减函数; 最优组件库存分配策

略是动态的阈值策略. 我们还用数值试验分析了各组参数对最优分配策略的影响, 为企业决策提供参考.

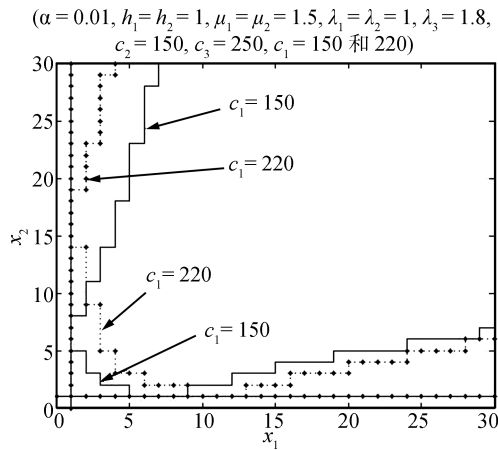


图 8 $c_1 + c_2 > c_3$ 时 c_1 对最优分配策略的影响

Fig. 8 The optimal allocation policy vs. c_1 with

$$c_1 + c_2 > c_3$$

本文的研究工作可以在多方面进行推广, 比如部件生产由一台设备进行生产、生产设备存在故障、部件的生产时间服从一般的分布、各类需求到达过程为复合泊松过程等情况, 以及更加一般的多种组件、多类产品需求的按单装配系统.

References

- 1 Benjaafar S, Elhafsi M. Production and inventory control of a single product assemble-to-order system with multiple customer classes. *Management Science*, 2006, **52**(12): 1896–1912
- 2 Lu Y D, Song J S, Zhao Y. No-holdback allocation rules for continuous-time assemble-to-order systems. *Operations Research*, 2010, **58**(3): 691–705
- 3 Song J S, Zhao Y. The value of component commonality in a dynamic inventory system with lead times. *Manufacturing Service Operations Management*, 2009, **11**(3): 493–508
- 4 Deshpande V, Cohen M A, Donohue K. A threshold inventory rationing policy for service-differentiated demand classes. *Management Science*, 2003, **49**(6): 683–703
- 5 Melchioris P, Dekker R, Kleijn M J. Inventory rationing in an (s, Q) inventory model with lost sales and two demand classes. *Journal of the Operational Research Society*, 2000, **51**(1): 111–122
- 6 Lou Shan-Zuo, Wu Yao-Hua, Lv Wen. Study on inventory control under stochastic disruptions. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(7): 999–1006
(娄山佐, 吴耀华, 吕文. 随机中断环境下的库存控制研究. *自动化学报*, 2010, **36**(7): 999–1006)
- 7 Ha A Y. Inventory rationing in a make-to-stock production system with several demand classes and lost sales. *Management Science*, 1997, **43**(8): 1093–1103
- 8 Ha A Y. Stock rationing policy for a make-to-stock production system with two priority classes and backordering. *Naval Research Logistics*, 1997, **44**(5): 457–472

- 9 Ha A Y. Stock rationing in an M/Ek/1 make-to-stock queue. *Management Science*, 2000, **46**(1): 77–87
- 10 Gayon J P, Benjaafar S, Vericourt F D. Using imperfect advance demand information in production-inventory systems with multiple customer classes. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2009, **11**(1): 128–143
- 11 Vericourt F D, Karaesmen F, Dallery Y. Optimal stock allocation for a capacitated supply system. *Management Science*, 2002, **48**(11): 1486–1501
- 12 Lippman S A. Applying a new device in the optimization of exponential queuing systems. *Operations Research*, 1975, **23**(4): 687–710
- 13 Porteus E. Conditions for characterizing the structure of optimal strategies in infinite horizon dynamic programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1982, **36**(3): 419–432
- 14 Puterman M L. *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. New York: John Wiley and Sons, 1994



杨超林 南京大学工程管理学院硕士研究生. 主要研究方向为制造系统分析, 优化与控制, 供应链管理.

E-mail: yclnju@163.com

(**YANG Chao-Lin** Master student in the Department of Management Science and Engineering, Nanjing University. His research interest covers manufacturing system analysis, optimization and control, and supply chain management.)



沈厚才 南京大学工程管理学院教授. 主要研究方向为制造与服务运营管理, 顾客选择行为研究和运营风险分析与管理. E-mail: hcshen@nju.edu.cn

(**SHEN Hou-Cai** Professor in the Department of Management Science and Engineering, Nanjing University. His research interest covers manufacturing and service operations management, customer choice behavior study, and operational risk analysis and management.)



高春燕 南京大学工程管理学院博士研究生. 主要研究方向为生产库存管理和排队论分析与优化. 本文通信作者.

E-mail: gaochy_2007@126.com

(**GAO Chun-Yan** Ph. D. candidate in the Department of Management Science and Engineering, Nanjing University. Her research interest covers

production-inventory management, and queueing system analysis and optimization. Corresponding author of this paper.)